SETSCI Conference Indexing System,
Volume 3 (2018), 224-227

ISAS 2018-Winter
2nd International Symposium on Innovative Approaches in Scientific Studies
November 30 – December 2, 2018, Samsun, Turkey

YEDEKSİZ TAMİR EDİLEBİLİR TEK ÜNİTELİ BİR SİSTEME AİT GEÇİŞ OLASILIĞI VE BEKLENEN GEÇİŞ SÜRESİNİN ANALİZİ

Nazila Rezaei[1+], Abdullah Çelik[2] ve Vedat Sağlam[3]

[1]İstatistik/Fenbilimleri Enstitüsü, Ondokuz Mayıs, Samsun, Türkiye
[1]İstatistik/Fenbilimleri Enstitüsü, Ondokuz Mayıs, Samsun, Türkiye
[1]İstatistik/Fenbilimleri Enstitüsü, Ondokuz Mayıs, Samsun, Türkiye
*sorumlu yazar: nazila.re@gmail.com
+sunucu: nazila.re@gmail.com

Özet – Bu çalışmada, yedeksiz tamir edilebilir tek üniteden oluşan bir sistem incelenmiştir. Ünite çalışmaya başlar fakat bir süre sonra bozulur ve tamire gider. tamirden sonra tekrar sisteme geri döner ve çalışmaya başlar. Bu sistem için iki durum mevcuttur. Birinci durum çalışma durumu ve ikincisi ise tamir-bakımdır. Durum uzayı $E = \{0,1\}$ olup, "0" durumu ünitenin çalışmasını "1" durumu ise tamir-bakım durumunu gösterir. Ünitenin çalışma süresinin parametresi λ ve tamir-bakım süresinin parametresi ise μ olup her ikisi de üstel dağılıma sahiptir. Buna göre sisteme ait Kolmogorov diferansiyel denklemleri elde edilerek, lineer diferansiyel denklemler yöntemi ve Laplace dönüşümü yöntemi ile elde edilmiştir. Daha sonra geçiş olasılıkları olan $\pi_{ij}(t)$ $(i,j = 0,1)$'ler ve bunların ortalamaları $\mu_{ij}(t)$'ler de bulunur. Ayrıca bu olasılıklardan $\pi_{10}(t)$'nın optimal değeri $(\max \pi_{10}(t))$ ve $\mu_{10}(t)$'ın optimal değeri $(\min \mu_{10}(t))$ elde edildi. Daha sonra bir örnek ile teorik sonuçlara ait sayısal değerler bulunarak grafikler ile gösterildi.

Anahtar kelimeler – İki durumlu Markov süreci, Lineer diferansiyel denklem, İleriye doğru Kolmogorov denklemleri, Optimizasyon.

I. GİRİŞ

Yedeksiz tamir edilebilir tek üniteli bir sisteme ilişkin bir çok çalışma yapılmıştır: R. E. Barlow ve L. C. Hunter (1961) çalışma ve bozulma durumundan meydana gelen bir elektronik üniteye ait çalışma ve tamir sürelerinin genel bir dağılıma uymasının güvenilirlik analizini yapmışlardır. Bhat (1984) yedeksiz tamir edilebilir tek üniteli bir sisteme ait geçiş olasılığı ve ortalamasının denklemlerini vermiştir. R. Malhotra ve G. Taneja (2013) değişen talebe göre tek üniteli bir sistemin güvenilirlik ve kullanılabilirliğini araştırmıştır. M. S. Kadyan, Promila ve J. Kumar (2014) çalışmalarında başarısızlık ve onarım(tamir) süreleri, hava koşullarının değişme zamanı, muayene (yeniden inceleme)zamanı ve varış zamanı ile ilgili rasgele değişkenler için rasgele dağılımlar göz önüne alınarak, tek bir ünite sisteminin bazı önemli güvenilirlik ölçümlerinin değerlendirilmesidir. A. Kumar ve M. Saini (2014) çalışmalarında, belirli bir t zamanından sonra herhangi bir bozulma (başarısızlık) oluşmadan bakıma giden tek üniteli bir sistem için güvenilirlik modeli geliştirmişlerdir, bununla birlikte ünitenin bozulma süresi, önleyici bakım süresi, değiştirme zamanı ve tamir süresi Weibull dağılım olarak alınmıştır.

Bu çalışmada ise geçiş olasılıkları olan $\pi_{ij}(t), (i,j = 0,1)$'ler ve bunların beklenen süreleri $\mu_{ij}(t)$'ler bulunuyor. Ayrıca bu olasılıklardan $\pi_{10}(t)$'nın optimal değeri $\max \pi_{10}(t)$ ve $\mu_{10}(t)$'nin optimal değeri $\min \mu_{10}(t)$ elde edildi. Konuyla ilgili olarak bir kurumda kullanılan fotokopi makinesinin çalışma ve servis (bakım-tamir) sürelerine ait ortalamaların sırasıyla gün olarak $\frac{1}{\lambda} = 90$ ve $\frac{1}{\mu} = 5$ ile üstel dağılıma sahip olduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda ilgilenmiş olduğumuz $\pi_{10}(t)$ ve $\mu_{10}(t)$ nin çeşitli ve optimal değerleri tablolar ve grafiklerle gösterildi.

II. SİSTEMİN TANIMI

Burada yedeksiz tamir edilebilir tek üniteden oluşan bir sistem incelenmiştir. Ünite çalışmaya başlar fakat bir süre sonra bozulur ve tamire gider. Tamirden sonra tekrar sisteme geri döner ve çalışmaya başlar. Bu sistem için iki durum mevcuttur. Birinci durum çalışma durumu ve ikincisi ise tamir-bakımdır. Ünite bozuluncaya kadar geçen süre λ parametreli üstel dağılıma sahiptir bununla birlikte ünite bozulduğunda (bakım-tamir) çalışma düzenine geri dönmesi için gereken hizmet süresinin dağılımı da μ parametresi ile üstel dağılıma sahiptir. Bu bağlamda ünitenin çalışması ve bozulması sırasıyla "0" ve "1" durumlarından meydana gelen sürekli parametreli kesikli durum uzaylı bir Markov zinciridir.

A. Sisteme Ait Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

Burada durum uzayı $E = \{0,1\}$' dir. $\pi_{ij}(t) = P(X(t) = j|X(0) = i)$; $i,j \in E$ olarak veriliyor. Markov matrisi veya geçiş olasılıkları matrisi de aşağıdaki gibi veriliyor.

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{00}(t) & \pi_{01}(t) \\ \pi_{10}(t) & \pi_{11}(t) \end{bmatrix}$$

$(0,t]$ ve $(t,\ t+h]$ zaman aralıklarında geçiş için Kolmogorov denklemleri kullanılarak,

$$\pi_{i0}(t+h)=\pi_{i0}(t)[1-\lambda h+o(h)]+\pi_{i1}(t)[\mu h+o(h)] \quad (1)$$
$$\pi_{i1}(t+h)=\pi_{i0}(t)[\lambda h+o(h)]+\pi_{i1}(t)[1-\mu h+o(h)] \quad (2)$$

Bulunur. (1) ve (2) denklemleri düzenlenirse ve $h\to 0$ için denklemler aşağıdadır:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\pi_{i0}(t+h)-\pi_{i0}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\lambda h\pi_{i0}(t)+\mu h\pi_{i1}(t)+o(h)}{h} \quad (3)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\pi_{i1}(t+h)-\pi_{i1}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda h\pi_{i0}(t)-\mu h\pi_{i1}(t)+o(h)}{h} \quad (4)$$

Böylece bulunan diferansiyel denklemler

$$\pi'_{i0}(t)=-\lambda\pi_{i0}(t)+\mu\pi_{i1}(t) \quad (5)$$

$$\pi'_{i1}(t)=\lambda\pi_{i0}(t)-\mu\pi_{i1}(t) \quad (6)$$

Olarak bulunur.

B. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Markov matrisinin i. satır toplamı.

$$\pi_{i0}(t)+\pi_{i1}(t)=1\,,\ \ i=0,1 \quad (7)$$

Olduğundan $\pi_{i0}(t)=1-\pi_{i1}(t)$ alınıp (5) eşitliğinde yerine konursa,

$$\pi'_{i0}(t)+(\lambda+\mu)\pi_{i0}(t)=\mu \quad (8)$$

(8) denklemi lineer diferansiyel denklemdir. Burada başlangıç değerleri $\pi_{i0}(0)=\begin{cases}1, & i=0\\ 0, & i=1\end{cases}$ * olduğundan $A=e^{\int_0^t(\lambda+\mu)dx}=e^{(\lambda+\mu)t}$ alınarak (8) denkleminin her iki tarafı A ile çarpılıp integrali alınırsa,

$$e^{(\lambda+\mu)t}\pi_{i0}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}+c_i\,,\qquad i=0,1 \quad (9)$$

bulunur. $i=0,1$ durumları için c_i' ler ve $\pi_{i0}(t)$'ler aşağıdaki gibi elde edilir :

$c_0=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ için ,

$$\pi_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (10)$$

$c_1=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ için,

$$\pi_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (11)$$

(7) eşitliğinden $\pi_{i0}(t)=1-\pi_{i1}(t)$ alınarak benzer işlemler yapılırsa,

$$\pi_{01}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (12)$$

$$\pi_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (13)$$

Olarak elde edilir. Ayrıca bu sonuçlar Laplace ve ters Laplace yöntemiyle de bulunabilir.

C. Limit Olasılıkları

$\pi_{ij}(t)$ geçiş olasılıklarının limit olasılıkları

$$\lim_{t\to\infty}\pi_{00}(t)=\lim_{t\to\infty}\pi_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\pi_0 \quad (14)$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}\pi_{01}(t)=\lim_{t\to\infty}\pi_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\pi_1 \quad (15)$$

olarak elde edilir.

D. İndikatör Süreci

Beklenen geçiş süresini bulmak için İndikatör süreci özelliğinden yararlanarak elde edilir:

$$I_{ij}(t)=\begin{cases}1, & \{X(t)=j|X(0)=i\}\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases} \quad (16)$$

$$P\big(I_{ij}(t)=1\big)=\pi_{ij} \quad (17)$$

$$E\big[I_{ij}(t)\big]=\pi_{ij}(t) \quad (18)$$

$$\mu_{ij}(t)=\int_0^t E\big[I_{ij}(\tau)\big]\,d\tau=\int_0^t\pi_{ij}(\tau)\,d\tau \quad (19)$$

$$\mu_{00}(t)=\int_0^t\pi_{00}(\tau)\,d\tau=\int_0^t\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]d\tau$$

$$\mu_{00}(t)=\frac{\mu t}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \quad (20)$$

Böylece diğer durumlar için

$$\mu_{10}(t)=\frac{\mu t}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \quad (21)$$

$$\mu_{01}(t)=\frac{\lambda t}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \quad (22)$$

$$\mu_{11}(t)=\frac{\lambda t}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \quad (23)$$

Olarak elde edilir. $t\to\infty$ alırınsa,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mu_{00}(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mu_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\pi_0 \quad (24)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mu_{01}(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mu_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\pi_1 \quad (25)$$

III. GEÇİŞ OLASILIĞI VE BEKLENEN GEÇİŞ SÜRESİNİN OPTİMİZASYON

A. Geçiş Olasılığının Optimizasyonu

Geçiş olasılıkları içinde $\pi_{10}(t)$ olasılığı ile ilgileniyoruz çünkü ünitenin tamir- bakım durumundan çalışma durumuna hızlı geçmesi gerekir veya bu geçişin yüksek olasılıkla gerçekleşmesi istenir. Bu bağlamda aşağıdaki teoremler veriliyor.

Teorem 1**.** Tamir-bakım durumundan çalışma durumuna geçiş olasılığı olan $\pi_{10}(t)$ en yüksek değeri $t\to\infty$ iken alır. Yani,

$$max\pi_{10}(t)=\lim_{t\to\infty}\pi_{10}(t)=\pi_{10}(\infty)=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad (26)$$

Olur.

İspat. Tamir-bakım durumundan çalışma durumuna geçiş olasılığı olan $\pi_{10}(t)$;

$$\pi_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$\frac{d(\pi_{10}(t))}{dt}=\mu e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (27)$$

ve

$$\frac{d^2\big(\pi_{10}(t)\big)}{dt^2}=-\mu(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}<0 \quad (28)$$

olduğundan $\pi_{10}(t)$'nin maksimum değeri vardır. Buna göre,

$$\frac{d(\pi_{10}(t))}{dt}=\mu e^{-(\lambda+\mu)t}=0,$$

$$e^{-(\lambda+\mu)t}=0 \quad (29)$$

olur. (29) eşitliği de ancak $t \to \infty$ iken sağlanır. Yani (26) eşitliği,

$$max\pi_{10}(t) = \lim_{t\to\infty} \pi_{10}(t) = \pi_{10}(\infty) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

elde edilir.

B. Beklenen Geçiş Süresinin Optimizasyonu

Bu kısımda ünitenin tamir- bakım durumundan çalışma durumuna beklenen geçiş süresinin kısa, yani en kısa sürede çalışma durumuna geçmesi gerekir. Bu bağlamda aşağıdaki Teorem 2 ile minimum beklenen geçiş süresi verilir:

Teorem 2. Tamir-bakım durumundan çalışma durumuna beklenen geçiş süresi olan $\mu_{10}(t)$ minimum değeri $t = 0$ iken alır. Yani,

$$\mu_{10}(t) = \frac{\mu t}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$

$$\min\left(\mu_{10}(t)\right) = 0$$

İspat.

$$\frac{d(\mu_{10}(t))}{dt} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (30)$$

ve

$$\frac{d^2(\mu_{10}(t))}{dt^2} = \mu e^{-(\lambda+\mu)t} > 0 \qquad (31)$$

olduğundan $\mu_{10}(t)$ minimum değere sahiptir. Buna göre,

$$\frac{d(\mu_{10}(t))}{dt} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} = 0$$

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$1 = e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (32)$$

(32) eşitliği $t = 0$ için sağlanır. Yani, $\min\left(\mu_{10}(t)\right) = \mu_{10}(t)|_{t=0} = 0$ elde edilir.

Not: *Burada '1' den '0' durumuna beklenen geçiş süresi* $t > 0$ *olması gerektiğinden optimal beklenen geçiş süresi ancak* $t \to 0$ *iken geçerli olacak.*

IV. NÜMERİK ÖRNEK

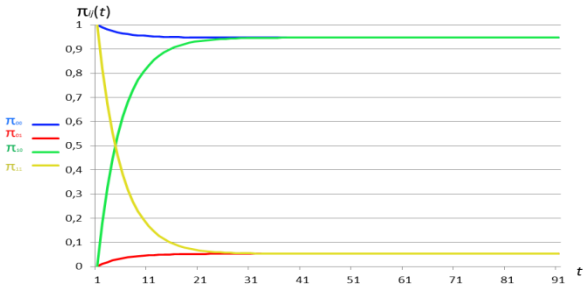
Bir kurumda kullanılan fotokopi makinesi ortalama 90 gün çalıştıktan sonra servise (bakım-tamire) gider ve burada ortalama 5 gün kalır. Bu fotokopi makinesinin çalışma süresi λ parametreli üstel dağılıma sahip ve servis (bakım-tamir) süresi de yine μ parametreli üstel dağılıma sahiptir. Bu bağlamda $\lambda = \frac{1}{90}$ ve $\mu = \frac{1}{5}$'dür. t'nin muhtelif değerleri için $\pi_{10}(t)$ ve $\mu_{10}(t)$ aşağıdaki tablolarda hesaplanmıştır

Tablo 1 . Geçiş olasılıklarının değerleri

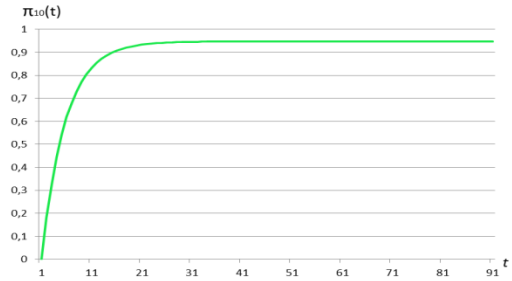
t	$\pi_{00}(t)$	$\pi_{01}(t)$	$\pi_{10}(t)$	$\pi_{11}(t)$
0	1	0	0	1
1	0,9899834	0,0100166	0,1802993	0,8197007
5	0,9656842	0,0343158	0,6176851	0,3823149
15	0,9495865	0,0504135	0,9074427	0,0925573
25	0,947637	0,052363	0,9425333	0,0574667
35	0,947401	0,0525991	0,9467829	0,0532171
45	0,9473724	0,0526276	0,9472975	0,0527025
65	0.9473685	0.05263152	0.9473674	0.05263262
69	0.9473684	0.05263155	0.9473680	0.05263203
75	0.9473684	0.05263157	0.9473683	0.05263170
79	0.9473684	0.05263158	0.9473684	0.05263163
85	0.9473684	0.05263158	0.9473684	0.05263159
90	0.9473684	0.05263158	0.9473684	0.05263158

Tablo 2 . Beklenen geçiş süresinin değerleri

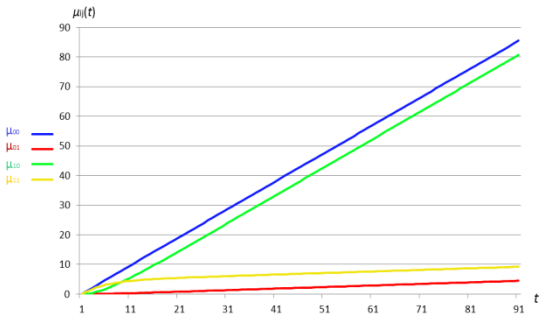
t	$\mu_{00}(t)$	$\mu_{01}(t)$	$\mu_{10}(t)$	$\mu_{11}(t)$
0.01	0,00999445	5.551648e-7	9,992967e-6	0,00999007
0. 1	0,09994483	5,516666e-5	0,000992999	0,099007
1	0,9948156	0,0051844	0,0933192	0,9066808
5	4,8993908	0,1006092	1,8109652	3,1890348
15	14,449327	0,550673	9,9121137	5,0878864
25	23,932246	1,0677544	19,219579	5,7804208
35	33,407048	1,5929519	28,673134	6,3268662
45	42,880868	2,11913220	38,144380	6,8556198
65	61.8282546	3.171745426	57.0914176	7.9085823
75	71.3019390	3.698060975	66.56509755	8.4349025
79	75.0914127	3.908587272	70.35457089	8.6454291
85	80.7756233	4.224376735	76.03878124	8.9612188
90	85.5124654	4.487534627	80.77562329	9.2243767



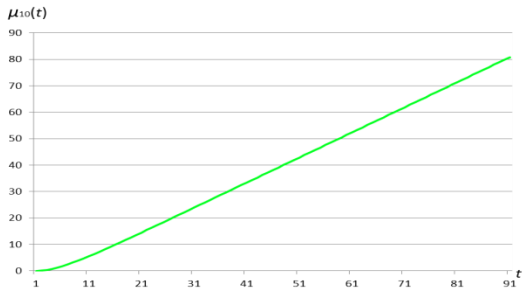
Şekil 1. $\pi_{ij}(t)$'lerin t'ye bağlı olasılık değerleri



Şekil 2. $\pi_{10}(t)$'nin t'ye bağlı olasılık değerleri



Şekil 3. $\mu_{ij}(t)$'nin t'ye bağlı ortalama değerleri



Şekil 4. $\mu_{10}(t)$'nin t'ye bağlı ortalama değerleri

Bu örnekte t için $\pi_{ij}(t)$ ve $\mu_{ij}(t)$'nin 90 günlük olasılık ve ortalama değerleri dört duruma göre sırasıyla Tablo 1' ve Tablo 2' de verilmiştir. Ayrıca t için $\pi_{ij}(t)$ nin dört durumunun grafiği Şekil1 de ve $\pi_{10}(t)$ Şekil 2'de, bununla birlikte $\mu_{ij}(t)$'nin grafiği Şekil 3'te ve $\mu_{10}(t)$'nin grafiği de Şekil 4'te verilmiştir. Bu Tablolar ve grafiklerin oluşturulmasında R paket programı kullanılmıştır.

IV. SONUÇ

Bu çalışmada tamir-bakım durumundan çalışma durumuna geçişle ilgilendiğimizden $\pi_{10}(t)$ ve $\mu_{10}(t)$ fonksiyonları ve bunların nümerik değerleri incelendi. Teorem 1'de $\pi_{10}(t)$'nin optimal değeri olan $\max((\pi_{10})) = 0{,}9474$' tür. Tablo 1 ve Şekil 2'de gösterildiği gibi t arttıkça $\pi_{10}(t)$ olasılığı da artmaktadır. $t \to \infty$ için 0.9474 olur. Şekil 2'den $\pi_{10}(t)$ olasılığının $t \geq 40$ için durağanlaştığı görülür. Ayrıca Şekil 1'den (14) eşitliğinden çalışma durumundan çalışma durumuna ve tamir-bakım durumundan çalışma durumuna limit olasılıklarının eşit olduğu görülür.

$\mu_{10}(t)$ ortalama sürenin minimum olması istenir: Tamir-bakım durumundan çalışma durumuna ortalama geçişin en kısa zamanda gerçekleşmesi bu sürenin optimal değeridir. Bu bağlamda Teorem 2 ve ispatı 4. bölümde verildi. Yani, $\mu_{10}(t)$'nin optimal değerinin $\min(\mu_{10}(t)) = \mu_{10}(t)|_{t=0} = 0$ olduğu gösterildi. Ancak herhangi bir durumdan diğer bir duruma geçmek için $t > 0$ olmalı ve bu bağlamda optimal süre olarak ta $t \to 0$ alınmalıdır. Süre arttıkça $\mu_{ij}(t)$'lerin de arttığı Tablo 2 ve Şekil 3'te gösterildi.

Tablo 2' deki t nin değerlerine göre $t \neq 0$ ve $t = 0.01$ için en küçük değere sahip olur.Yani, $\mu_{10}(0.01) = 9.992967e - 6$ olduğu görülür.

KAYNAKLAR

[1] R. E. Barlow ve L.C. Hunter. "Reliability analysis of a one-unit system, " Operations Research, Vol. 9, No. 2 (Mar. - Apr., 1961), pp. 200-208. 1961.

[2] M. S. Kadyan, Promila ve J. Kumar. "Reliability modeling of a single-unit system with arbitrary distributions subject to different weather conditions," Int J Syst Assur Eng Manag. 5(3):313–319. 2014.

[3] R. Malhotra ve G. Taneja. " Reliability and availability analysis of a single Unit system with varying demand, " *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*. Vol. 2, No. 1, pp. 77–88. 2013.

[4] A. Kumar and M. Saini. " Cost-benefit analysis of a single-unit system with preventive maintenance and weibull distribution for failure and repair activities, " *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, No. 2. 2014.

[5] R. Billlinton ve N. A. Ronald. " Reliability evaluation of engineering systems concept and techniques." (Second edition)

[6] U. Narayan Bhat. "Elements of applied stochastic processes." (Second edition). John Wiley & Sons. New York. 1984.